F 313 – 'Mecânica Geral'

Tempo e Espaço

São conceitos fundamentais com base na intuição.

Propriedades fundamentais:

Espaço e tempo são homogêneos e contínuos. Tem sentido dizer que um 'evento' ocorreu num ponto específico do espaço para um particular instante de tempo:

$$x_0 = x(t_0), \; y_0 = y(t_0), \; z_0 = z(t_0)$$

Chamamos de 'Evento', o conjunto de 4 números reais

$$(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

Pressupostos da Mecânica Newtoniana:

a) A geometria do espaço é Euclidiana.
b) Dois observadores com relógios idênticos e sincronizados, sempre concordarão no tempo de um evento. A 'Simultaneidade' é universal.
c) Não há limite, em princípio, em medir posições e velocidades com a precisão desejada.
d) O espaço é isotrópico, ou seja as propriedades físicas são as mesmas em todas as direções do espaço.

Estas hipóteses devem ser testadas experimentalmente. Elas funcionam no domínio de baixas velocidades ($v \ll c$), tamanhos não muito pequenos (a escala é dada por 10^{-9} m) e para campos gravitacionais não muito intensos.

Princípio de Relatividade de Galileo.

Dados dois corpos movimentando-se com velocidade relativa uniforme (constante), é impossível decidir (por uma experiência) qual deles está em repouso e qual em movimento. A velocidade tem significado relativo.

Sistema de Referência Inercial (SRI):

É aquele onde o espaço é homogêneo e isótropo, e o tempo é homogêneo (não está acelerado). Num SRI, um corpo 'isolado' movimenta-se com velocidade constante (movimento retilíneo uniforme, (MRU))

As leis da Física são idênticas em todos os SRI's

Transformação de Galileo

Um mesmo evento é observado desde dois SRI's, um deles movimentando-se com velocidade $\vec{V}$ em relação ao primeiro:

$$\overset{S}{\left[\vec{r} = (x, y, z),\ t\right]} \qquad\qquad \overset{S'}{\left[\vec{r}\,' = (x', y', z'),\ t'\right]}$$

Os relógios de ambos observadores podem ser sincronizados e ajustados para marchar de maneira idêntica. Então:

$$t' = t \implies \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$$

As equações de transformação ficam:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}_0 - \vec{V}t \, ,$$

notando que tanto as posições e velocidades são vetores. A origem do tempo é escolhida para a condição inicial

$$\vec{r}\,'(0) = \vec{r}(0) - \vec{R}_0 \, .$$

As origens de S e S' estão separadas pela distância $|\vec{R}_0|$, para $t' = t = 0$. Calculamos a eq. de transformação para a velocidade:

$$\vec{v}\,'(t') = \frac{d}{dt'}\vec{r}\,'(t') = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{R}_0 - \vec{V}t\right)$$

$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{V} = \vec{v}(t) - \vec{V} \, ,$$

isto é:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} .$$

Obtemos agora a aceleração medida em ambos SRI's:

$$\vec{a}' = \frac{d}{dt'}\vec{v}' = \frac{d}{dt}\vec{v}' = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} - \vec{V}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

"A mesma aceleração é medida em ambos SRI's."

Basta encontrarmos um SRI. Todo outro SR movimentando-se com velocidade constante em relação ao primeiro, é também um SRI. A aceleração de um corpo é a mesma para todos eles.

Leis de Newton: massa e força

Consideramos a terceira lei de Newton, na forma III':

"A experiência mostra, que se temos dois corpos isolados do resto do universo, as acelerações que eles experimentam satisfazem a relação:

$$\boxed{\vec{a}_1 = -k_{12}\vec{a}_2 \,, \qquad k_{12} > 0} \,,$$

com $k_{21} = k_{12}^{-1}$, e
onde o escalar real k_{12}, para os corpos dados, é uma constante independente das posições, velocidades e estado interno dos corpos".

▶ **Def.** Massa (inercial)
Se escolhermos o corpo 1 como padrão (unidade de massa), definimos a 'massa' do corpo 2 por:

$$\boxed{m_2 \equiv k_{12}.}$$

Esta definição precisa ser consistente se compararmos vários corpos. Pensemos num terceiro corpo, com aceleração $\vec{a}_3$:

$$\vec{a}_2 = -k_{23}\,\vec{a}_3 \;,\quad \vec{a}_1 = -k_{13}\,\vec{a}_3 \;,$$

com

$$m_3 = k_{13} \;.$$

O conceito de massa não pode depender do corpo escolhido como tendo massa unitária.

A experiência mostra que para 3 corpos quaisquer, temos a relação:

$$\boxed{k_{12}\,k_{23}\,k_{31} = 1.} \qquad (*)$$

Portanto, em virtude de $(*)$:

$$\vec{a}_2 = -k_{23}\,\vec{a}_3 = -\frac{1}{k_{12}\,k_{31}}\,\vec{a}_3$$

$$= -\frac{k_{13}}{k_{12}}\,\vec{a}_3$$

$$\Rightarrow \quad k_{12}\,\vec{a}_2 = -k_{13}\,\vec{a}_3 \;,\ \text{ou seja:}$$

$$m_2\vec{a}_2 = -m_3\vec{a}_3$$, ou melhor:

$$\vec{a}_2 = -\left(\frac{m_3}{m_2}\right)\vec{a}_3 ,$$

onde a razão $\frac{m_3}{m_2}$ não depende da unidade escolhida.

Definida a massa, a III lei fornece:

$$m_2\vec{a}_2 = -m_3\vec{a}_3 ,$$

para dois corpos isolados.

▸ Def. Força, $\vec{F}$

$$\vec{F} \equiv m\vec{a}$$

O 'Princípio de Ação e Reação' se escreve como:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{23} = -m_3\vec{a}_3 = -\vec{F}_{32} ,$$

com:

$$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} ,$$

onde $\vec{F}_{23}$ é a força sobre o corpo 2 devida à presença do corpo 3.

A 'massa' é um escalar aditivo. Vejamos um exemplo:

Sejam 3 corpos de massas (m_1, m_2, m_3) isolados.

Temos:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$$

$$m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

Em total:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}).$$

Pelo princípio de ação e reação temos que:

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \;,\quad i \neq j,\; i,j = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \quad m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = 0$$

Se o corpo '2' está rigidamente ligado ao corpo '3' (formando um único corpo), então:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \vec{a}\,,$$

e

$$m_1\vec{a}_1 = -(m_2+m_3)\,\vec{a}\,,$$

resultando que o corpo composto tem massa 'm'

$$m = m_2 + m_3$$

$$\Rightarrow \qquad m_1\vec{a}_1 = -m\vec{a} \quad .$$

▸ Def. Momento linear de um corpo, $\vec{p}$

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \, .$$

É o produto de sua massa (escalar), por sua velocidade (vetor), resultando um vetor.

Tomando a taxa de variação de $\vec{p}$ com o tempo:

$$\dot{\vec{p}} \text{ (Newton)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{(Leibniz)} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\vec{a} = \vec{F} \, ,$$

obtendo a II lei de Newton.

Seja o caso de $\vec{F} \equiv 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{v} = cte. \Rightarrow \vec{v} = cte. \quad ,$$

resultando, que o corpo se movimenta com velocidade constante (mov. retilíneo uniforme), ou seja a I lei de Newton é obtida.

Note que as leis de Newton são formuladas num SRI.

▶ **Def.** Ponto material ou partícula

Objeto cuja estrutura interna não é relevante para o problema, e cujo tamanho é desprezível para a escala de interesse. Uma partícula é representada como um ponto no espaço, provido de massa e sujeito às leis da dinâmica. Na primeira parte do curso, estudaremos o movimento de partículas.

Resumo crítico das leis de Newton

I lei: Contém a definição de um SRI, junto com a afirmação que tal sistema de referência existe.

III lei: Trata de um fato empírico (ação e reação) e permite definir a 'massa' e a 'força'.

II lei: Define o momentum linear e liga sua taxa de variação temporal com a força que age sobre o corpo. A equação de movimento é 'covariante' por transformações de Galileo (mudança de um sistema inercial para outro SRI).

Exemplo 1. Movimento num plano

Uma partícula de massa m movimenta-se no plano xy, de tal forma, que o vetor posição é dado por:

$$\vec{r}(t) = a \cos\omega t \, \hat{\imath} + b \,\text{sen}\, \omega t \, \hat{\jmath} \, ,$$

onde (a, b) e ω são constantes positivas e $a \geq b$. Os vetores unitários $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ são a base ortonormal do sistema de coordenadas (x, y). Eles estão fixos no SR dado:

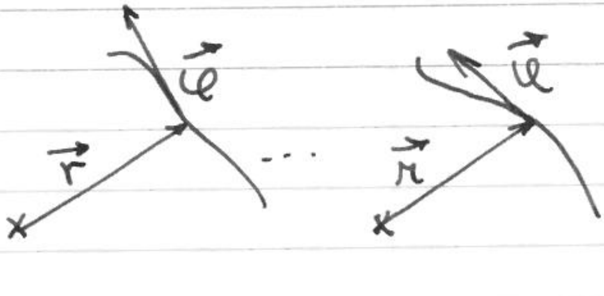
i) velocidade: $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -a\omega \,\text{sen}\, \omega t \, \hat{\imath} + b\omega \cos\omega t \, \hat{\jmath}$$

Definindo um vetor $\vec{\varphi} \equiv -a \,\text{sen}\, \omega t \, \hat{\imath} + b \cos\omega t \, \hat{\jmath}$

$$\vec{v}(t) = \omega \vec{\varphi}(t)$$

o vetor $\vec{\varphi}$ aponta segundo a tangente à trajetória



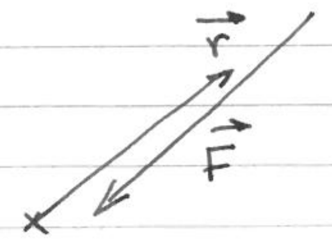
ii) aceleração: $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -\omega^2 (a \cos\omega t \, \hat{\imath} + b \,\text{sen}\, \omega t \, \hat{\jmath})$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

iii) Força (que mantém a órbita):

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r},$$



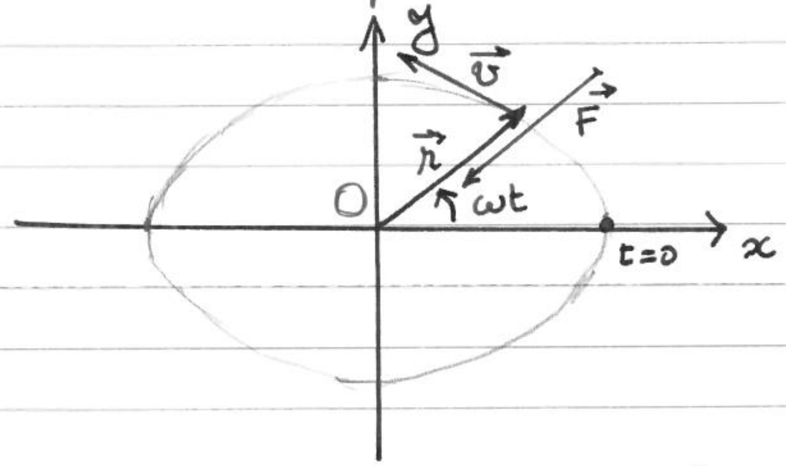
está sempre dirigida para a origem.

iv) Equação da órbita. É necessário eliminar o tempo como parâmetro:

$$x(t) = a\cos\omega t,$$
$$y(t) = b\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

obtemos $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t = 1$$

$\Rightarrow$ a órbita é uma elipse de eixos $(2a, 2b)$:



Corresponde à órbita de um oscilador espacial (elipse centrada no centro de força).

Exemplo 2 Força constante

Uma partícula de massa $\underline{m}$ está sujeita a uma força constante $\vec{F}$. Encontre a trajetória

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m} = \text{cte.} \qquad , t_0 = 0 .$$

$$\vec{v}(t) = \int_0^t dt' \left(\frac{\vec{F}}{m}\right) + \vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\vec{F}}{m}\right) t ,$$

onde $\vec{v}_0$ é a velocidade inicial para $t \equiv 0$.

Obtemos:

$$\vec{F} = m \left[\frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t} \right]$$

Trajetória:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t dt' \left[\vec{v}_0 + \left(\frac{\vec{F}}{m}\right) t' \right]$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}}{m}\right) t^2$$

ou:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}\, t^2}$$

Exemplo 3 Força de gravidade

Perto da superfície da Terra, encontramos experimentalmente que todos os corpos caem com a mesma aceleração g. A força associada é chamada de 'peso do corpo' W. Para o corpo que cai, a 2ª lei de Newton fornece:

$$\vec{F} = \left(\frac{W}{g}\right)\vec{a},$$

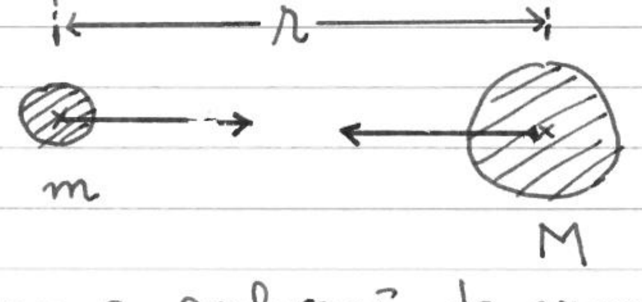
onde $\left(\frac{W}{g}\right) = cte = m$. A massa do corpo pode ser determinada simplesmente pesando o corpo.

Exemplo 4. Lei de Gravitação de Newton

Newton encontrou que dois corpos de massas 'm' e 'M' se atraem com uma força que em intensidade é dada por:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2},$$

onde G é uma constante universal e r é a distancia entre os corpos:



Relação com a aceleração de gravidade 'g'?
Em princípio, a massa que é determinada pesando o corpo poderia ser diferente da massa determinada pela 3ª lei de Newton (chamada 'massa inercial', porque representa resistência ao movi-

mento).

Notação:

'm_i', massa inercial (passiva),
'm_g', massa gravitacional (ativa).

A lei da gravitação deve ser escrita como:

$$F = G \frac{M_g m_g}{r^2},$$

pois é a massa determinada pela força de gravidade ('peso' do corpo). Agora, para a dinâmica, combinamos a 2ª lei de Newton com a lei da gravitação:

$$F = m_i \cdot a = \frac{G M_g}{r^2} m_g,$$

e o corpo de massa m_i (m_g) experimenta uma aceleração dada por:

$$a = \frac{G M_g}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right),$$

devido à atração de outro corpo de massa M_g. Se estudarmos a 'queda livre' de um corpo perto da superfície da Terra, $r \approx R_T$, obtendo

$$a = \frac{G M_g^{(T)}}{R_T^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right) = g,$$

onde $M_g^{(T)}$ é a massa gravitacional da Terra e R_T o raio terrestre.

A experiência ensina que g não depende da massa m_i (ou m_g) do corpo.

Princípio de Equivalência

Nenhuma experiência tem detectado alguma diferença entre massa inercial e massa gravitacional.

Usando unidades adequadas,

$$\frac{m_g}{m_i} \equiv 1 ,$$

as duas massas podem ser consideradas idênticas e podemos retirar o sub-índice.

$$m_g = m_i \equiv m .$$

A massa acaba sendo uma propriedade 'intrínseca' das partículas. Ela é uma grandeza fundamental, junto com o espaço e o tempo. As três grandezas dão origem aos chamados 'Sistemas de Unidades':

1) Sistema 'cgs', onde as unidades são

[cm − gr − seg] ;

2) Sistema 'MKS', com [m − kg − seg] .

As unidades para as outras grandezas podem ser deduzidas a partir das fundamentais.

Exemplos.

a) velocidade, $[v] = \frac{cm}{seg}$ ou $\frac{m}{seg}$

b) força

$$[F] \equiv \text{dina} = 1 \cdot \frac{gr \cdot cm}{seg^2} \quad (cgs)$$

$$[F] \equiv \text{Newton} = 1 \cdot \frac{kg \cdot m}{seg^2} \quad (MKS)$$

c) aceleração,

$$[a] = \frac{cm}{seg^2}, \ (cgs)$$

$$[a] = \frac{m}{seg^2}, \ (MKS)$$

Nota. Aceleração de gravidade

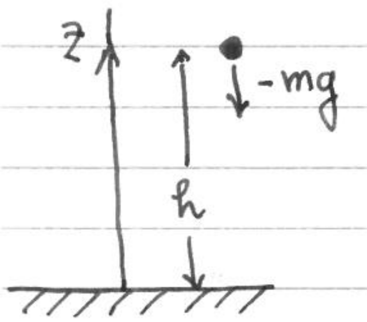
$$g = 980,2 \ cm \cdot seg^{-2} \ (cgs)$$

$$= 9,802 \ m \cdot seg^{-2} \ (MKS)$$

Problemas elementares em 1-dim, 1 coordenada

1. Queda livre (velocidade inicial nula)

Altura 'h', força constante $F = -mg$



$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

com tempo inicial $t_0 \equiv 0$. É um caso particular do problema resolvido antes.

Tempo τ para chegar ao chão:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2. Teorema do Momento Linear

Coordenada x, ao longo de uma reta

2ª lei:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F = \frac{dp}{dt} .$$

Integrando a eq. acima para 'p', obtemos:

$$p(t_2) = p(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, F ,$$

e chamando $p_2 \equiv p(t_2)$, $p_1 \equiv p(t_1)$,

$$p_2 - p_1 \equiv \Delta p = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, F(t)}_{\text{"impulso"}}$$

Se for dada $F = F(x, v, t)$, o impulso poderá ser calculado para a trajetória $(x(t), v(t))$.

Se a força for constante, $F = F_0$

$$\Delta p = F_0 (t_2 - t_1) = F_0 \Delta t \, .$$

Se a força for nula, $\frac{dp}{dt} = 0$, $\Rightarrow p_2 = p_1$, ou melhor $p = cte.$ (o momento linear é conservado).

3. Teorema da Energia

Multiplicando a eq. de Newton (2ª. lei) por v

$$v \frac{dp}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = Fv$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = Fv \, .$$

- **Def.** Energia Cinética, K

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2 .$$

A eq. acima pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} K = \underbrace{F v}_{\text{'potência'}} ,$$

e integrando no tempo:

$$\underbrace{K(t_2)}_{K_2} - \underbrace{K(t_1)}_{K_1} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F v ,$$

ou

$$\Delta K \equiv K_2 - K_1 = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, F v}_{\text{'trabalho feito pela força'}}$$

Teorema da Energia: $$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F v$$

'A variação de energia cinética, durante um intervalo de tempo $\Delta t \equiv t_2 - t_1$, é igual ao trabalho executado pela força durante esse intervalo de tempo'

Se a força for apenas função da coordenada,

$$F = F(x),$$